

MANIPULACIÓN DINÁMICA DE ONDAS ACÚSTICAS EN METAMATERIALES VARIANTES EN EL TIEMPO MEDIANTE INTERFACES ESPACIO- TEMPORALES

Galiana-Nieves, Jaime¹, Redondo. J², Sánchez-Morcillo². V, Picó. R²

¹Universitat Politècnica de València

{jaiganie@doctor.upv.es}

²Instituto de Investigación para la Gestión Integrada de Zonas Costeras, Universitat Politècnica de València, Campus de Gandía

{fredondo@fis.upv.es, victorsm@fis.upv.es, rpico@fis.upves}

Resumo

Los metamateriales variables en el tiempo, mediante la modificación gradual o instantánea de sus propiedades físicas, ejercen un control sobre la propagación de las ondas acústicas de formas que no pueden conseguir los medios estáticos. Al modificar la velocidad de propagación o la densidad en las interfaces espacio temporales entre medios diferentes, las ondas dispersadas, tanto hacia delante como hacia atrás, pueden ajustarse en el espacio y en el tiempo. Este estudio profundiza en diversos fenómenos ondulatorios observados en distintos escenarios, centrándose en la interacción onda-interfase móvil. Empleamos simulaciones numéricas en el dominio del tiempo mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo utilizando el método de las diferencias finitas centradas en el tiempo (CIT-FDTD) para validar los coeficientes analíticos de dispersión en la interfase. Estas simulaciones permiten comprender el complejo comportamiento de los metamateriales con condiciones dinámicas y ofrecen aplicaciones potenciales en ingeniería acústica avanzada y ciencia de materiales.

Palavras-chave: metamateriales, interfase temporal, espacio-temporal, materiales dinámicos.

Abstract

Time-varying metamaterials, through either the gradual or instantaneous modifications of their physical properties, exert control over the propagation of acoustic waves in ways unachievable by static media. By altering the propagation speed or density at spatial-temporal interfaces between differing media, the scattered waves, both forward and backward can be tailored in space and time. This study delves into diverse wave phenomena observed across various scenarios, focusing on the interactions between propagating waves and dynamically moving acoustic interfaces. We employ time-varying numerical simulations with the finite-difference time-domain using the immersed centered-in-time FDTD method (CIT-FDTD) to validate the analytical scattering coefficients. These simulations provide insights into the complex behaviors of metamaterials under dynamic conditions, offering potential applications in advanced acoustic engineering and materials science.

Keywords: metamaterials, space time interfase, space-time, dynamic materials

PACS no. 43.20.+g, 43.28.+h

1 Introducción

En los últimos años, el estudio de metamateriales espacio temporales ha comenzado a recibir atención debido a su capacidad para manipular las propiedades de las ondas con las que interactúa [1], [2]. Nos referimos a un material espaciotemporal como un sistema cuyas propiedades físicas, como su tamaño, densidad de composición, posición, etc., varían con el tiempo. Estos cambios en sus características pueden dar lugar a fenómenos novedosos que se están comenzando a estudiar en acústica[3]. Los estudios experimentales de sistemas móviles pueden realizarse en casos en los que la velocidad de movimiento del mismo sea relativamente lenta[4]. Sin embargo, cuando esta velocidad se acerca a la velocidad de propagación del sonido, la medición de los fenómenos resultantes se hace inviable. Es por ello que se recurre a métodos de simulación para estudiar los efectos de dichos sistemas.

En principio, el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) está particularmente adaptado para estudiar sistemas que presentan variaciones en el tiempo, ya que es un método en el dominio temporal[5]. Sin embargo, presenta algunas dificultades técnicas debido a la variación de las variables acústicas en los puntos cercanos a la interfase. Por ello, aunque este método permita un estudio detallado de la propagación de ondas y su interacción con el material en un sistema acústico, se han desarrollado modificaciones del mismo para poder estudiar el comportamiento de materiales que varían en el tiempo. Tal es el caso del Immersed Boundary Method (IBM-FDTD)[6], método muy utilizado en dinámica de fluidos para simular el comportamiento de paredes y estructuras que se mueven en el espacio y su efecto sobre las ondas que inciden sobre ellas[7], [8]. Otra metodología consiste en aplicar la transformación de Lorentz al método de las diferencias finitas, común en electromagnetismo para estudiar sistemas que varíen de tamaño de forma constante[9]. Otra forma de simular medios acústicos con interfaces móviles es mediante la realización de aproximaciones analíticas de sistemas móviles e implementarlas como condiciones de contorno en un modelo de FDTD, utilizado para la simulación de sistemas como resonadores de Helmholtz con dimensiones variables[10].

Un sistema espacio-temporal que está siendo estudiado en los últimos años es el conocido como interfaz espacio temporal[11]. Definimos como interfaz espacio temporal una separación entre dos medios con distintas características físicas que se va desplazando en el tiempo y en el espacio a una velocidad constante. En este proyecto simularemos la interacción entre una onda y dicho sistema. El método elegido para simular la interacción entre una onda y una interfaz espacio temporal es el método de las diferencias finitas centrado en el tiempo (CIT-FDTD) [12]. Este método permite la adición de un campo de fondo de velocidades que altera la velocidad de propagación de las ondas simuladas. De esta manera, podemos introducir una velocidad de fondo en el sistema que resulte equiparable a aplicar un movimiento de esas mismas características sobre la interfaz entre los dos medios colindantes.

El objetivo de este proyecto es la validación de el método CIT-FDTD para el estudio del comportamiento de interfaces móviles con resultados analíticos conocidos.

2 Interfaz espacio temporal

En la Figura 1 se puede observar la interacción entre la onda incidente y la interfaz móvil. En el eje x del diagrama espacio temporal se representa la distancia y en el eje de las y el tiempo t . En el eje de las z se representa la amplitud de la presión sonora P . La interfaz móvil, representada por una línea discontinua púrpura, es el punto de unión entre dos medios con distintas velocidades de propagación

del sonido c_1 y c_2 que desplaza con una velocidad v . Esta representación espacio temporal ayuda a entender la interacción y dinámicas que ocurren en el sistema.

Cuando la onda incidente que viaja en el primer medio a una velocidad c_1 interactúa con la interfaz móvil, se generan nuevas ondas como resultado del cambio de medio y el movimiento de la interfaz. En la figura se puede observar cómo la interacción de la onda incidente (representada en rojo) resulta en un cambio de amplitud y frecuencia en las ondas dispersadas. Se generan una señal reflejada que se propaga en el primer medio y una onda que se transmite al segundo con distintas características espaciales y temporales. Por lo tanto, la forma de caracterizar las dinámicas de un sistema espacio temporal de este tipo requiere de el análisis del cambio producido en frecuencia de la onda debido a la interacción con la interfaz móvil y el estudio de las amplitudes de las ondas tras la interacción. Dependiendo de la relación entre las velocidades de los medios y la velocidad de la interfase, distinguimos tres regímenes.

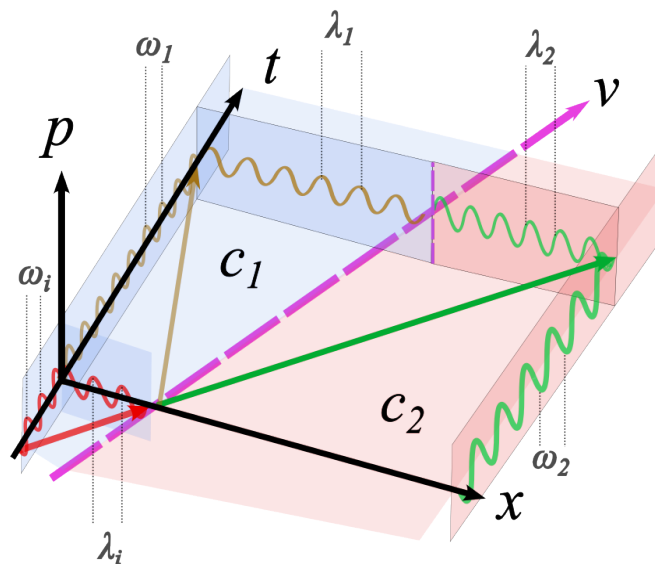


Figura 1 – Esquema de una interfaz espacio temporal. La línea discontinua morada representa una interfaz entre dos medios con velocidades de propagación c_1 y c_2 , que se desplaza desde una posición inicial a una velocidad definida por v . La flecha roja representa la onda incidente en la interfaz, que se propaga en el medio inicial, mostrado en azul. La onda reflejada se muestra mediante una flecha roja. La onda forward, representada en verde, se propaga a través del segundo medio en la dirección positiva. En los ejes x (distancia) y t (tiempo) se muestran las proyecciones de cada componente que se propaga en el sistema, dando lugar a las posibles variaciones de frecuencia, ω , y longitud de onda, λ provocadas por el movimiento de la interfaz.

En el régimen subsónico la velocidad de movimiento de la interfase es menor que cualquiera de las velocidades de propagación de los medios, es decir $|v| < \min(c_1, c_2)$. En esta situación, como se puede observar en la Figura 2, a partir de una onda incidente se obtienen dos ondas dispersadas. Por un lado se genera una onda reflejada, r , que se propaga en el primer medio con dirección opuesta a la

incidente. Por otro lado, se transmite otra onda en el segundo medio en la misma dirección que la onda incidente de ahora en adelante la llamaremos onda forward, f .

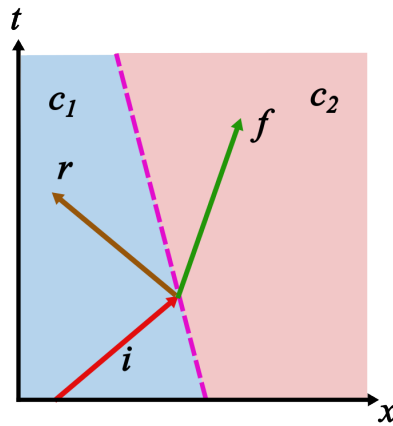


Figura 2-Representación en el espacio (eje x) y el tiempo (eje t) de la evolución de un sistema de interfaz espacio temporal subsónico. La interfaz, en morado, que separa ambos medios se desplaza en el espacio con una velocidad negativa que cumple que $|(v)| < \min(c_1, c_2)$. Esto provoca que, a partir de una onda incidente i , en rojo, se generen una onda forward f en el segundo medio y una onda reflejada, r , en el primer medio desplazándose en dirección contraria a la incidente.

En segundo lugar, el caso en el que la velocidad de desplazamiento de la interfaz es mayor que la velocidad de propagación en ambos medios, $|(v)| > \max(c_1, c_2)$, se conoce como régimen supersónico (Figura 3). En este caso, las componentes surgidas de la interacción entre la onda incidente y la interfaz móvil se diferencian entre una onda forward definida de la misma forma que en el caso subsónico y una onda backward, b . La mayor diferencia con el caso subsónico radica en que en este caso ambas componentes se propagan en el segundo medio.

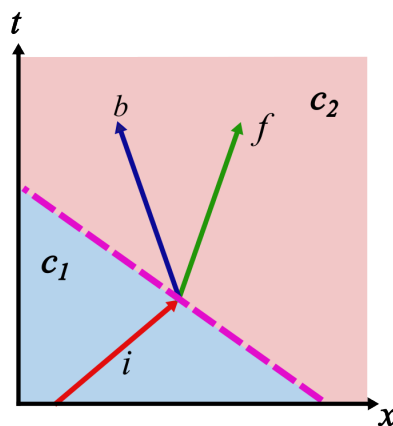


Figura 3-Evolución en el espacio (eje x) y el tiempo (eje t) de una interfaz espacio temporal subsónico. La interfaz, en morado, que separa ambos medios se desplaza en el espacio con una velocidad negativa que cumple que $|(v)| > \max(c_1, c_2)$. A partir de una onda incidente i , en rojo, se generan dos ondas: una onda forward f y una onda backward b , ambas propagándose en el segundo medio pero con direcciones opuestas.

Finalmente, el caso intersónico, representado en la Figura 4, es aquel en el que la velocidad de movimiento de la interfaz se encuentra entre las velocidades de propagación de los medios que separa, o bien $c_1 < |v| < c_2$, o $c_2 < |v| < c_1$. Este caso es el más complejo, ya que las tres componentes descritas, r, f, b , serán o no analizables dependiendo de la relación entre las velocidades seleccionadas.

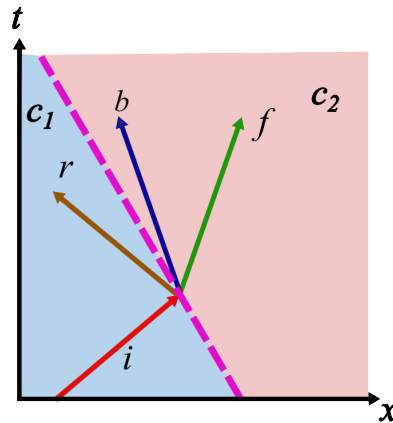


Figura 4-Representación en el espacio (eje x) y el tiempo (eje t) de la evolución de un sistema de interfaz espacio-temporal subsónico. La interfaz, en morado, que separa ambos medios se desplaza en el espacio con una velocidad negativa tal que $c_2 < |v| < c_1$. En este caso, las ondas generadas a partir de la interacción entre la onda y la interfase pueden variar dependiendo de la relación entre las velocidades. En el caso mostrado, tres componentes (r, f, b) se generan en esta interacción.

El cambio de longitud de onda y frecuencia producido tras la interacción de una onda incidente con la interfase móvil se puede deducir comparando la proyección de las ondas en los ejes espacial y temporal, respectivamente.. En la Tabla 1 se muestra la transformación en frecuencia temporal y espacial para cada uno de los casos descritos, donde $\lambda(v, c_2)$ y $\omega(v, c_2)$ son la longitud de onda y la frecuencia angular obtenida para una interfaz con velocidad v que separa un medio con velocidad de propagación c_1 y un segundo medio con velocidad de propagación c_2 . Las componentes λ_i, ω_i representan la longitud de onda y la frecuencia angular de la onda incidente que se propaga en el primer medio.

Tabla 1 – Conversión en frecuencia de las componentes generadas a partir de la interacción entre una interfase móvil y una onda incidente.

	Forward	Backward	Reflejada
$\frac{\lambda(v, c_2)}{\lambda_i}$	$\frac{v - c_2}{v - c_1}$	$\frac{v + c_2}{v - c_1}$	$\frac{v + c_1}{-(v - c_1)}$
$\frac{\omega(v, c_2)}{\omega_i}$	$\frac{v - c_1}{c_1 \left(\frac{v}{c_2} - 1 \right)}$	$\frac{c_2}{c_1} \frac{v - c_1}{v + c_2}$	$\frac{-(v - c_1)}{v + c_1}$

Se observa que, en el caso de la onda reflejada, la relación de frecuencia y longitud de onda existente con la onda incidente no depende de la velocidad de propagación en el segundo medio, únicamente depende de la velocidad de desplazamiento de la interfaz móvil.

A partir del estudio de la interacción entre una onda y una interfase entre dos medios [13], [14], [15] se pueden a su vez obtener los coeficientes de dispersión de las tres componentes para los casos subsónico, supersónico e intersónico, pudiendo de esta manera caracterizar cada componente de manera completa. En la Tabla 2 se muestran los coeficientes de dispersión de cada componente definidos como el coeficiente entre la velocidad de partícula de las ondas generadas tras la interacción con la interfase móvil y la velocidad de partícula de la onda incidente.

Tabla 2 –Coeficientes de dispersión de las componentes generadas a partir de la interacción entre una interfase móvil y una onda incidente.

	Forward	Backward	Reflejada
Subsónico	$\frac{2c_1}{c_1+c_2}$		$\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}$
Supersónico	$\frac{c_2+c_1}{2c_2}$	$\frac{c_2-c_1}{2c_2}$	
Intersónico	$\frac{c_2+c_1}{2c_2} \frac{ v -c_1}{ v +c_2} \left[\left(\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2} \right) + 1 \right] + \frac{2c_1}{ v +c_2}$	$\frac{ v -c_1}{ v +c_2}$	$\frac{c_1- v }{c_1+ v }$

Se puede observar que, tanto los casos subsónicos como supersónicos no dependen de la velocidad de movimiento de la interfaz en cuanto al coeficiente de dispersión de las ondas generadas.

3 Método de simulación

El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) se modela a partir de una discretización del dominio espaciotemporal a estudio. De esta manera, se obtienen dos mallas al tresbolillo, una de presión sonora, p , y otra de velocidad de partícula, u , ubicadas de manera alterna tanto en el tiempo como en el espacio. Esto significa que se resuelven alternativamente en el espacio y el tiempo (leap-frog). Sin embargo, cuando se desea añadir movimiento al modelo que se simula, este esquema de simulación presenta inestabilidades. Es por ello que se modifica la forma de obtención del método para añadir un campo de velocidades que simule el movimiento de la interfase móvil. Las ecuaciones previas a la discretización que define el método se expresan como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla p + c^2 \rho_0 \nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) v_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (2)$$

donde p es la presión sonora en el modelo, u es la velocidad de partícula, c es la velocidad de propagación en el medio, ρ_0 la densidad en dicho medio y, finalmente, v_0 es el campo de velocidades de la interfase móvil. La componente v_0 determina la variación espacial de la velocidad de partícula y de la presión sonora.

En este trabajo hemos optado por utilizar el método de las diferencias finitas centrado en el tiempo (CIT-FDTD) [16]. A diferencia del método FDTD habitual, este método utiliza dos pasos temporales para obtener la actualización de los valores de presión y de velocidad, pudiendo implementar el campo de velocidades de fondo.

La discretización de las ecuaciones (1-2) para su implementación como un modelo unidimensional se realiza de la siguiente manera

$$p^t = p^{t-2} - 2 \Delta t c^2 \rho_0 \nabla u_x^{t-1} - 2 \Delta t v_0 \cdot \nabla p^{t-1} \quad (3)$$

$$u_x^t = u_x^{t-2} - \frac{2 \Delta t}{\Delta h \rho_0} \nabla p^{t-1} - 2 \Delta t v_0 \nabla u_x^{t-1} \quad (4)$$

donde Δt es el incremento temporal surgido de la discretización en el tiempo del modelo, al igual que Δh es el incremento espacial en la dirección de las x tratándose de una simulación uni-dimensional. Las variables p^t y u_x^t son los valores de presión y velocidad de partícula en el instante t . Se asume que el campo de velocidades añadido es constante a lo largo del modelo. Por lo tanto, la variación espacial del mismo, como se observa en la ecuación (4), se anula.

3.1 Modelo de simulación

Utilizando el método descrito, el modelo implementado para el estudio de interfaces espacio temporales consiste en un modelo uni-dimensional de una longitud $L=50\text{ m}$ compuesto por dos materiales con la misma densidad $\rho=1.21\text{ kg/m}^3$ pero diferente velocidad de propagación $c_1=341\text{ m/s}$ y c_2 entre 68.2 y 1705 m/s . La velocidad de movimiento de la interfaz v varía entre 0 y 1360 m/s . El sistema se excita mediante una señal gaussiana modulada a una frecuencia central en $x=0$ de tal forma que únicamente emita en la dirección positiva del eje de las x . En los extremos del modelo se implementan Perfectly Matched Layers (PMLs) para minimizar reflexiones en el dominio del estudio.

La discretización del medio se ha realizado utilizando dos incrementos espaciales Δh diferentes, dependientes de las velocidades de propagación en cada medio c_1 y c_2 . De esta manera podemos garantizar un mismo número de Courant para todo el modelo. Se ha definido un número de Courant de $C=0.25$ para garantizar la estabilidad del sistema.

Las simulaciones realizadas para validar el método CIT-FDTD para la simulación de interfaces espacio temporales consistirán, teniendo en cuenta que c_1 siempre tendrá el mismo valor, en fijar uno de los parámetros de velocidad, o bien c_2 o bien v , y variar el otro. De esta forma, variando la relación entre c_1 , c_2 y v se pueden recorrer los regímenes descritos previamente (subsónico, supersónico e intersónico) pudiendo así caracterizar la interacción entre la interfase y las ondas incidentes.

4 Resultados

Los coeficientes de dispersión obtenidos en los casos simulados se han comparado con los resultados analíticos descritos en la Sección 2 para estudiar la validez del método para su correcto estudio. En la Figura 5 se muestra una simulación de un caso intersónico. En el eje de las x se representa la longitud del modelo, mientras que en el eje de las y se representa el tiempo transcurrido. Se pueden observar las ondas generadas tras la interacción con la interfase móvil, representada mediante una línea discontinua morada. A la izquierda de la interfase, que correspondería con el primer medio, observamos una onda incidente y una onda reflejada propagándose en sentido contrario con la misma velocidad de propagación. Dicha velocidad de propagación se observa a partir de la pendiente de cada componente en el diagrama espacio temporal. En el segundo medio, a la derecha de la interfaz, se generan una onda forward y una onda backward, ambas propagándose a la misma velocidad pero en sentidos opuestos. Los colores de las componentes denotan su velocidad de partícula en cada posición e instante de tiempo.

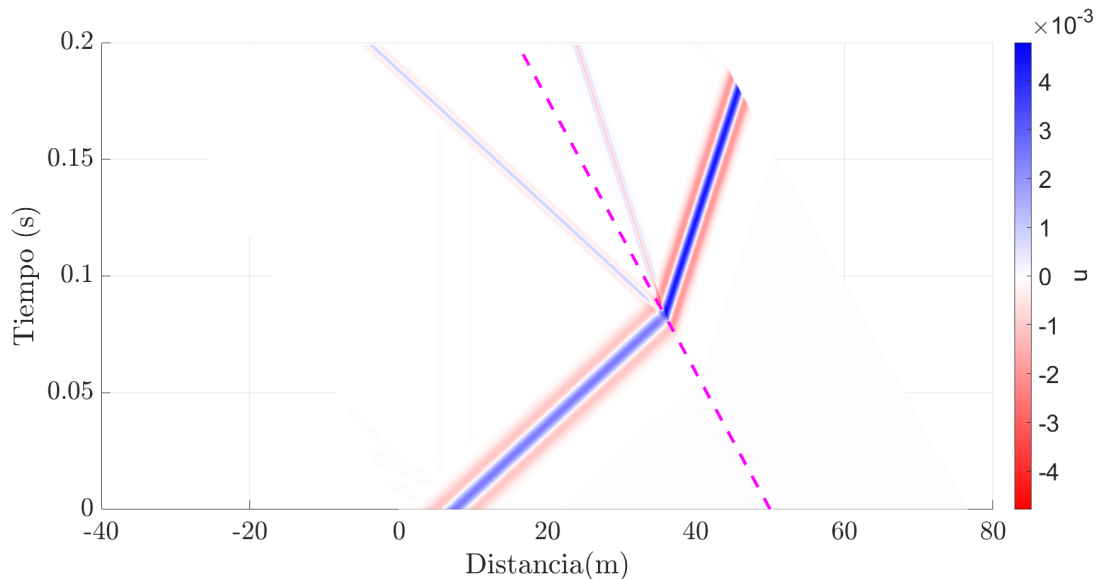


Figura 5- Representación de una simulación de una interfase espacio temporal en el régimen intersónico. En el eje de las x se muestra la longitud del modelo. En el eje de las y es representado el tiempo transcurrido en la simulación, en segundos. El movimiento de la interfase entre ambos medios se puede observar en la línea discontinua morada. La pendiente de la línea denota su velocidad de movimiento. A partir de la interacción entre la onda incidente y la interfase, se observa la generación de las componentes f (en sentido positivo), b y r (estas dos últimas en dirección contraria a la incidente). Se representa en la escala de colores la velocidad de partícula en cada posición y cada instante.

En la Figura 6 se muestran los resultados de los coeficientes de dispersión a partir de las simulaciones. En primer lugar se ha fijado una velocidad de movimiento de la interfaz $v = -170.5 \text{ m/s}$. De forma

que la interfase se desplaza en dirección contraria y con velocidad la mitad de la velocidad de la onda sonora en el primer medio $c_1=341\text{ m/s}$. En la figura se pueden observar los resultados de los coeficientes de dispersión obtenidos a partir de la variación de la velocidad de propagación del segundo medio. Se puede observar que, hasta que $c_2=170,5\text{ m/s}$ nos encontramos en el caso intersónico, dado que $c_2 < |v| < c_1$. Esto se observa en la existencia de tres ondas dispersadas: una onda reflejada, una onda forward y una onda backward. A partir de esa velocidad de propagación en el segundo medio, pasamos a encontrarnos en un caso subsónico en el que la velocidad de movimiento de la interfaz es menor a cualquiera de las velocidades de propagación de los medios. Esto da lugar a únicamente una onda reflejada y una onda backward que dependen de las propiedades del segundo medio. Se puede observar que los resultados obtenidos mediante las simulaciones coinciden de manera adecuada con aquellos procedentes de los estudios analíticos.

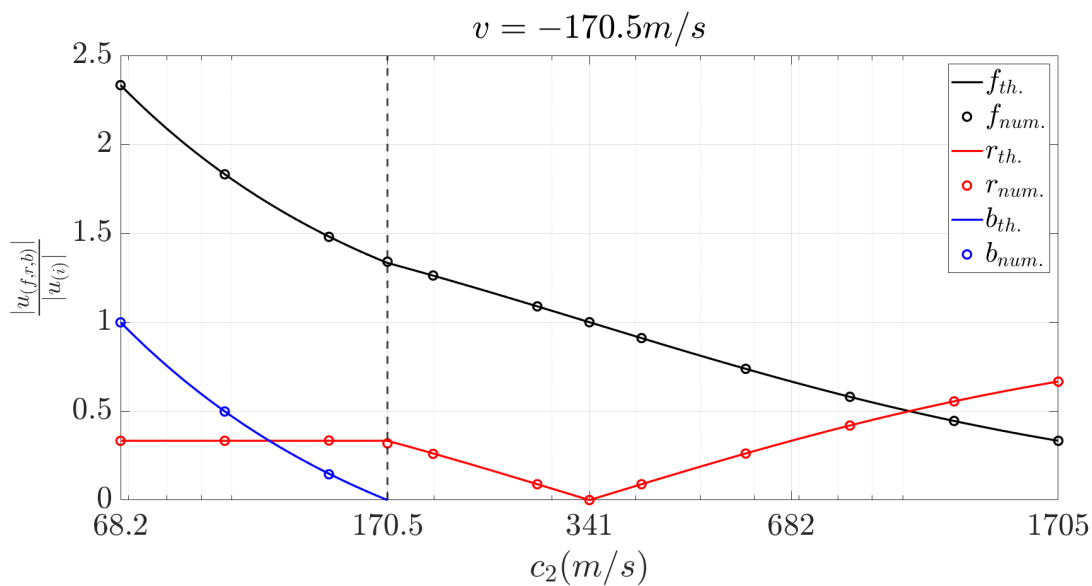


Figura 6- Resultados de los coeficientes de dispersión (eje y) obtenidos a partir de las simulaciones y los valores teóricos para el caso de una velocidad de interfase fija $v = -170\text{ m/s}$ y varios valores de la velocidad de propagación en el segundo medio (eje x).. Los valores teóricos se muestran con una línea continua, mientras que los resultados de las simulaciones se representan mediante puntos. Se representan los resultados para las componentes forward (negro), reflejada (rojo) y backward (azul).

A continuación, en la figura 7, representamos los resultados de la variación de la velocidad de movimiento de la interfaz fijando una velocidad de propagación en el segundo medio de $c_2=170.5\text{ m/s}$. En este caso, a medida que varía la velocidad de movimiento de la interfaz móvil, pasamos de el caso supersónico, en el que tenemos componentes forward y backward, al caso intersónico, donde también está presente una componente reflejada. Una vez en el caso subsónico, la onda reflejada se mantiene, mientras que la backward se desvanece. De nuevo, podemos observar una muy adecuada relación entre los resultados numéricos y los analíticos.

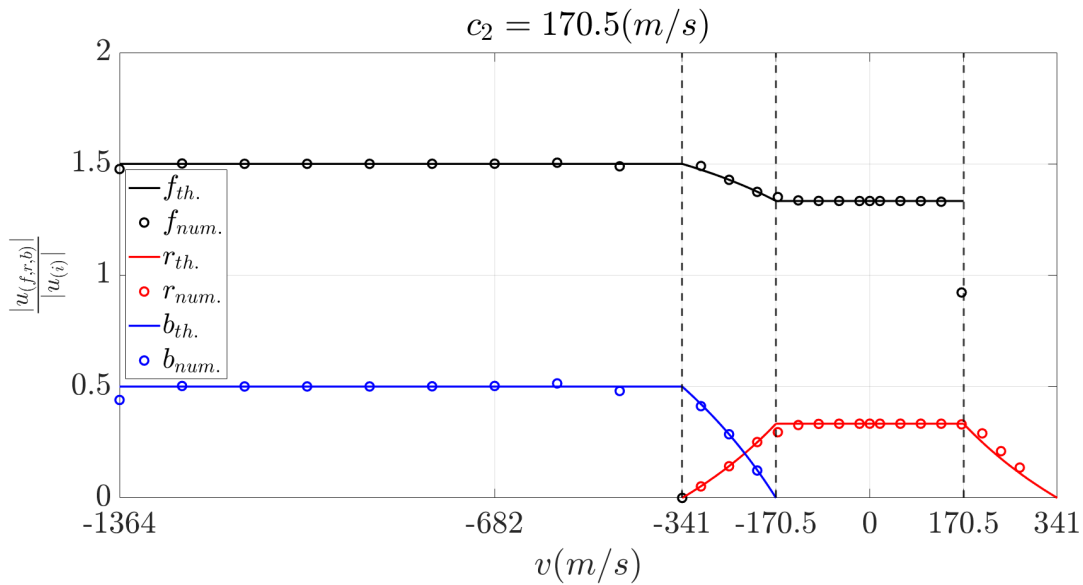


Figura 7-Resultados de los coeficientes de dispersión (eje y) obtenidos a partir de las simulaciones y los valores teóricos para el caso de una velocidad de propagación en el segundo medio fija $v=170\text{ m/s}$ y varios valores de la velocidad de desplazamiento de la interfase (eje x). Los valores teóricos se muestran con una línea continua, mientras que los resultados de las simulaciones se representan mediante puntos. Se representan los resultados para las componentes forward (negro), reflejada (rojo) y backward(azul).

5 Conclusiones

El objetivo de este trabajo es la implementación de un método de simulación que nos permita estudiar el comportamiento de metamateriales espacio temporales definidos por una interfase móvil cuya posición varía en el tiempo. Para ello se ha optado por el desarrollo del método de las diferencias finitas centradas en el tiempo (CIT-FDTD). Se ha comprobado que los resultados del coeficiente de dispersión para ondas forward, backward y reflejadas obtenidos a partir de los estudios analíticos coinciden con los simulados mediante el método de las diferencias finitas. El método de simulación propuesto ha mostrado un gran acuerdo con los resultados analíticos en los tres regímenes estudiados: subsónico, supersónico e intersónico.

Mediante dos barridos de los parámetros variables, siendo estos la velocidad de propagación en el segundo medio y la velocidad de movimiento de la interfase, se han obtenido los coeficientes de dispersión de los casos medibles en los distintos regímenes y se han comparado con los resultados analíticos. Una vez realizado el estudio de la adecuación de este método para la obtención de los coeficientes de dispersión de las componentes generadas por la interacción entre la onda y la interfase, se deberá estudiar el comportamiento de las conversiones de frecuencia descritas en la sección 2.

6 Bibliografía

- [1] C. Caloz and Z.-L. Deck-Léger, ‘Spacetime Metamaterials, Part I: General Concepts’, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, no. 68, pp. 1569–1582, 2020, doi: 10.1109/TAP.2019.2944225.
- [2] C. Caloz and Z.-L. Deck-Léger, ‘Spacetime Metamaterials—Part II: Theory and Applications’, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 68, no. 3, Mar. 2020, doi: 10.1109/TAP.2019.2944216.
- [3] N. Krauss and J. Paulose, ‘Nondispersive One-Way Signal Amplification in Sonic Metamaterials’, *Physical Review*, vol. 16, no. 024020, 2022, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.024020>.
- [4] D. Zhao, C. A. Barrow, A. S. Morgans, and J. Carrote, ‘Acoustic Damping of a Helmholtz Resonator with an Oscilating Volume’, *AIAA Journal*, vol. 47, no. 7, Jul. 2009, doi: <https://doi.org/10.2514/1.39704>.
- [5] K. S. Yee, ‘Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell’s Equations in Isotropic Media’, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-14, no. 3, May 1966, doi: 10.1109/TAP.1966.1138693.
- [6] S. Bilbao, ‘Immersed boundary methods in wave-based virtual acoustics’, *The Journal of The Acoustical Society of America*, vol. 151, Mar. 2022, doi: <https://doi.org/10.1121/10.0009768>.
- [7] J. Deng, S. Xue-Ming, and R. An-Lu, ‘A new modification of the immersed-boundary method for simulating flows with complex moving boundaries’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 52, pp. 1195–1213, Jun. 2006, doi: 10.1002/flid.1237.
- [8] F. Wang, Q. Hou, D. Pan, J. Wei, and J. Dang, ‘A Hybrid Method for Acoustic Analysis of the Vocal Tract During Vowel Production’, *11th International Seminar, ISSP 2017, Tianjin, China*, p. October 2017, doi: 10.1007/978-3-030-00126-1_7.
- [9] P. Ren, L. Kuang, J. Gao, and Q. Huo Liu, ‘FDTD Analysis of Relativistic Bistatic Polarized Scattering From a High-Speed Moving Dielectric Coated Target’, *IEEE Access*, vol. 11, pp. 34486–34496, 2023, doi: 10.1109/ACCESS.2023.3253814.
- [10] E. Riva, M. I. N. Rosa, Y. Guo, and M. Ruzzene, ‘Adiabatic sound transport in acoustic waveguides with time-varying Helmholtz resonators’, *Frontiers in Acoustics*, 2023, doi: 10.3389/facou.2023.1271221.
- [11] D. Sarkar, *FDTD Analysis of Guided Electromagnetic Wave Interaction with Time-Modulated Dielectric Medium*, Springer. in SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-1630-4>
- [12] T. Van Renterghem, ‘Efficient outdoor sound propagation modelling with the finite-difference time-domain (FDTD) method: a review’, *Aeroacoustics*, vol. 13, pp. 385–404, 2014.
- [13] L. E. Kinsler, A. R. Frey, Alan. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of acoustics*, Fourth. in John Wiley & Sons.
- [14] R. Picó, J. Redondo, and V. J. Sánchez-Morcillo, ‘Wave propagation in a time-varying elastic medium’. 53º congreso Español de Acústica. XII congreso Ibérico de acústica, 2022. [Online]. Available: <https://documentacion.sea-acustica.es/publicaciones/Elche22/ID-108.pdf>
- [15] L.-Q. Shui, Z.-F. Yue, Y.-S. Liu, Q.-C. Liu, and J.-J. Guo, ‘One-dimensional linear elastic waves at moving property interface’, *Wave Motion*, vol. 51, pp. 1179–1192, 2014, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.07.005>.
- [16] T. Van Renterghem and Botteldooren, Dick, ‘Prediction-step staggered-in-time FDTD: An efficient numerical scheme to solve the linearised equations of fluid dynamics in outdoor sound propagation’, *Applied Acoustics*, vol. 68, pp. 201–216, 2007, doi: 10.1016/j.apacoust.2005.10.003.