

SUPERCRISTALES ACÚSTICOS CON ABSORCIÓN VISCOSA EXTRAORDINARIA A BAJAS FRECUENCIAS

Martin Ibarias¹, Arkadii Krokhin², José Sánchez-Dehesa¹

¹Grupo de Fenómenos Ondulatorios, Universitat Politècnica de València, ES-46022 Valencia. España.

{e-mail: maibaal1@upv.es; jsdehesa@upv.es}

²Department of Physics, University of North Texas, USA

{e-mail: arkadii@unt.edu}

Resumen

Presentamos el diseño y realización de estructuras acústicas bidimensionales que denominamos supercristales (SCs) con el objetivo de obtener la máxima disipación viscosa a bajas frecuencias. Un SC consiste en la combinación de dos cristales fonónicos (PnC) con periodicidades muy diferentes, donde uno de los dos PnC se comporta como el fondo del otro y ambos se homogenizan como un todo. Hemos desarrollado una teoría analítica de homogenización que permite obtener el coeficiente efectivo de atenuación del sonido en un SC como función de la frecuencia y la fracción de llenado. Esta teoría es válida para cualquier sección transversal de cilindros y cualquier red de Bravais. Aquí mostramos resultados para SCs realizados con barras rígidas de sección circular embebidas en aire. El cristal fonónico con menor parámetro de red a_1 actúa como fondo donde se coloca el cristal fonónico con barras cilíndricas de mayor diámetro distribuidas en una red hexagonal con parámetro de red a_2 mucho mayor que el anterior; $a_2 \approx 20a_1$. Los resultados teóricos indican que los coeficientes de atenuación para los SCs estudiados son entre un 20% y un 45% mayor que el decaimiento obtenido con el PnC con parámetro de red más pequeño. Los resultados analíticos están en buen acuerdo con las simulaciones numéricas basadas en elementos finitos y con medidas realizadas con muestras fabricadas en impresoras 3D.

Palabras-chave: absorción viscosa, cristal fonónico, doble periodicidad, supercristal.

Abstract

This work presents the design and practical realization of acoustic structures denominated supercrystals (SCs) to obtain maximum viscous absorption. An SC consists of a combination of two phononic crystals (PnC) with different periodicities where one PnC acts as the background of the other and both homogenize as a unique structure. We have developed an analytic theory to homogenize the SC to obtain the effective viscous attenuation coefficient that depends on the frequency and the lattice filling fraction. The theory is valid for any section of the scatterers and Bravais lattice. Here, we show results for SCs made of hard rods with circular cross-sections embedded in air. The PnC with lower lattice period a_1 acts as the background of the other, which consists of a PnC with rods of larger diameters distributed in a hexagonal lattice with period a_2 , which is much larger, i.e., $a_2 \approx 20a_1$. The theoretical results regarding the attenuation coefficients indicate that the SCs have values about 20% and 45% larger than those obtained for the PnC with a smaller lattice period. The analytical results agree with numerical simulations based on the finite element method and measurements made on samples fabricated in a 3D printer.

Keywords: viscous losses, super crystal, double periodicity, acoustic metamaterial.

PACS nos. 66.20.Cy, 62.65.+k, 43.20.-f, 81.05.Xj

1 Introducción

Cuando una onda de presión de sonido se propaga en un fluido con viscosidad sufre una atenuación exponencial que va como $p(x) \sim e^{-\gamma_0 x}$, donde el coeficiente de atenuación crece cuadráticamente con la frecuencia. Esto es,

$$\gamma_0 = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \left[\frac{4}{3}\eta + \xi \right], \quad (1)$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido, η y ξ son los coeficientes de viscosidad y la velocidad del sonido es c_0 . Sin embargo, el coeficiente de atenuación γ_0 representa solo una absorción débil porque los gradientes de velocidad en el fluido son muy pequeños. No obstante, si tenemos una interfaz fluido-sólido, se forma una capa límite viscosa de pequeño grosor δ donde aparecen gradientes de velocidad mayores donde el sonido es fuertemente absorbido por efectos termo-viscosos [1].

Es así que debido a la alta absorción de sonido en estructuras con interfaces sólido-fluido, han surgido varios trabajos donde se explota esta propiedad como, por ejemplo, estructuras con micro cavidades y resonancias híbridas [2-6], estructuras con gradientes [7-9], estructuras periódicas con pérdidas viscosas [10-12] y sistemas de múltiple escala compuestos de espumas o inclusiones periódicas [13-17]. En particular, en los sistemas de múltiple escala, debido a la formación de múltiples fronteras viscosas y a la interacción entre los distintos dispersores, se consigue un aumento en la absorción del sonido. Es por eso que los sistemas de múltiple escala son interesantes de estudiar.

Una forma de construir un sistema de múltiple escala es mediante dos cristales fonónicos, donde uno esté embebido en el otro. De esta manera, uno de los cristales fonónicos sirve como fondo de metafluido para el otro cristal fonónico. Esto podría llevarnos a la mejora de algunas propiedades, como la inercia, que fue previamente predicha fenomenológicamente en la Ref. [16].

Este trabajo presenta una teoría analítica para calcular el coeficiente de decaimiento de un cristal fonónico de doble escala. A este sistema lo llamamos supercristal acústico (SC) y mostramos cómo es posible obtener una mejora significativa en la absorción del sonido debido a la interacción de doble escala de los dispersores. Se presentan resultados experimentales, numéricos y analíticos.

2 Teoría

Consideremos una red bidimensional de varillas sólidas con circunferencia L y período a . Aquí, la pérdida de energía debida a la interacción de una sola varilla sólida se calcula mediante

$$\Delta E/E \sim (\delta/\lambda)(L/a) \quad (2)$$

donde la capa viscosa formada alrededor de la varilla $\delta \ll \lambda = 2\pi c_0/\omega$. En el caso de un cristal fonónico bidimensional, estas pérdidas pueden estimarse como

$$\gamma_{ph} \sim \Delta E/aE \sim \frac{L}{a^2} \sqrt{\frac{\omega\eta_0}{\rho_0}} \sim \frac{1}{ac_0} \sqrt{\frac{f\omega\eta_0}{\rho_0}}, \quad (3)$$

donde $f \sim (L/a)^2$ es la fracción de llenado de los dispersores sólidos en la red bidimensional.

Sin embargo, esta aproximación no tiene en cuenta ni la interacción entre cada una de las varillas sólidas, ni la geometría de la celda unitaria ni la geometría del dispersor. Por lo tanto, esta fórmula subestima las pérdidas disipativas en un cristal fonónico. Una forma de tener en cuenta la contribución de todos los dispersores sólidos y todos los parámetros geométricos del sistema es haciendo una expansión en ondas planas. La fórmula exacta para calcular el coeficiente de decaimiento para un cristal fonónico bidimensional en el límite de baja frecuencia (donde la relación de dispersión es lineal, $\omega = c_{eff}k$ [18]) fue publicada en la Ref. [12] y va como:

$$\gamma_{ph}(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{L}{2A_c c_{eff}(\hat{\mathbf{k}})} \sqrt{\frac{\omega\eta_0}{2\rho_0}} \frac{M(\hat{\mathbf{k}}, \rho_0)}{N(\hat{\mathbf{k}}, \rho_0)}, \quad (4)$$

donde $M(\hat{\mathbf{k}}, \rho_0)$ y $N(\hat{\mathbf{k}}, \rho_0)$ están representados por series sobre los vectores de la red recíproca \mathbf{G} . c_{eff} es la velocidad efectiva del sonido, y $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector de onda. El funcional M depende de los factores de forma de los dispersores

$$F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A_c} \int_a e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (5)$$

siendo A_c el área de la celda unitaria. El funcional N está relacionado con la disipación dentro de la capa límite, donde el factor de forma alrededor del contorno l_a que separa las varillas sólidas del entorno fluido es

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{L} \oint_{l_a} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} dl. \quad (6)$$

Si calculamos el decaimiento del sonido en un cristal fonónico usando estas fórmulas, se obtiene un fuerte aumento en las pérdidas viscosas a altas fracciones de llenado [10, 12] comparado a un medio compuesto de solo aire.

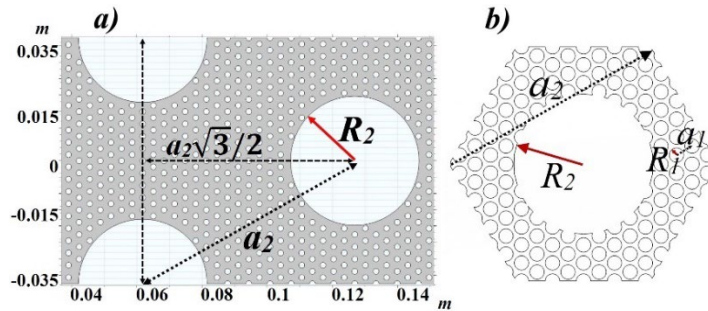


Figura 1- Supercristal bidimensional de varillas cilíndricas rígidas en aire. a) Cilindros pequeños de radio $R_1 = 0.88169$ mm dispuestos en una red hexagonal con período $a_1 = 3.755$ mm. Varillas grandes con $R_2 = 19.715$ mm y $a_2 = 20a_1 = 75.1$ mm. Ambas redes tienen fracciones de llenado similares, $f_1 = 0.2$ y $f_2 = 0.25$. b) Representación de la celda unitaria del supercristal. Para este ejemplo, usamos una red hexagonal, que es isotrópica en 2D.

Por otro lado, en un SC, tenemos una homogenización de doble escala, es decir, dos redes se homogenizan como un todo. La Figura 1 representa un SC, que consiste en una red hexagonal de cilindros pequeños, con radio R_1 y período corto a_1 , inmersa en aire, formando un fondo de metafluido para cilindros más grandes, de radio R_2 y período largo $a_2 = 20a_1$. Aunque podemos pensar que la red de período corto y el aire siempre será un fondo homogenizado independiente de la red de cilindros grandes, no es así. El SC se homogeniza como un todo y podemos considerar tanto la red pequeña como la red grande como el fondo de metafluido de la otra red y viceversa.

En el SC, podemos usar directamente la Ecuación (4) para obtener individualmente el coeficiente de decaimiento de cada red por separado y calcular la contribución aditiva de cada red. Sin embargo, esto lleva a una estimación incorrecta de las pérdidas viscosas de todo el SC. Esto se debe a que cuando la onda sonora interactúa con el SC, se encuentra tanto con los cilindros grandes como los pequeños y esta interacción conduce a un realce adicional de la disipación en el SC. Así, la dispersión entre redes afecta a cada coeficiente de decaimiento en la Ecuación (4) superando el valor del coeficiente de decaimiento individual de cada cristal fonónico que conforma al SC, es decir, tendremos dos coeficientes de decaimiento nuevos $\gamma_1 > \gamma_{ph1}$ y $\gamma_2 > \gamma_{ph2}$. Por lo tanto, el coeficiente de decaimiento total en el SC es

$$\gamma_{sc} = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (7)$$

donde γ_1 y γ_2 se calculan usando una formula parecida a la Ecuación (4), pero con los parámetros del SC, es decir, con una nueva velocidad efectiva del sonido asociada a la interacción tanto de cilindros pequeños como los grandes con el aire c_{sc} y la densidad de masa adecuada en los funcionales para cada contribución i -ésima de la red, $M(\rho_{eff_i})$ y $N(\rho_{eff_i})$. Así, el conjunto de ecuaciones para calcular el coeficiente de decaimiento del SC es

$$\gamma_1 = \frac{L_1}{2A_{c1}c_{sc}} \sqrt{\frac{\omega\eta_0}{2\rho_0} \frac{M(\rho_{eff_2})}{N(\rho_{eff_2})}}, \quad (8)$$

$$\gamma_2 = \frac{L_2}{2A_{c2}c_{sc}} \sqrt{\frac{\omega\eta_0}{2\rho_0} \frac{M(\rho_{eff_1})}{N(\rho_{eff_1})}}, \quad (9)$$

donde los parámetros adecuados han sido cambiados. Es importante notar que los funcionales ahora dependen de la densidad efectiva del fondo de metafluido según el caso. ρ_{eff_1} corresponde a la densidad de masa efectiva de la red pequeña y ρ_{eff_2} a la densidad de masa efectiva de la red más grande. En la raíz cuadrada, η_0 y ρ_0 permanecen sin cambios porque la disipación ocurre en la capa límite de cada dispersor, donde los gradientes de velocidad del aire cambian rápidamente.

Por otro lado, para calcular c_{sc} seguimos el procedimiento de la Ref. [18], pero reemplazando el fondo por las propiedades efectivas del metafluido correspondiente. En este paso, podemos considerar la red grande o la red pequeña como el fondo de metafluido y el resultado de c_{sc} sería el mismo porque la fórmula es simétrica y el SC se homogeniza como un todo.

3 Resultados y discusión

Para garantizar que los cálculos son correctos, los hicimos en la región de homogeneización $\lambda \geq 4a_2$ [19] y considerando fracciones de llenado donde las capas viscosas no se superponen entre sí. Considerando el SC de la Figura 1, calculamos el coeficiente de decaimiento con la Ecuaciones (7-9) obteniendo $\gamma_{sc} = 0.0048 \sqrt{\omega} \text{ m}^{-1}$. Con el fin de hacer una comparación directa con un cristal fonónico simple, calculamos el coeficiente de decaimiento correspondiente al fondo del SC anterior con la Ecuación (1), obteniendo $\gamma_{ph_1} = 0.004 \sqrt{\omega} \text{ m}^{-1}$. Así, el coeficiente de decaimiento del SC representa una atenuación de un 20 % más rápida. Esto se debe a la interacción entre ambas redes, tal como se explicó en la sección anterior. Si deseamos una atenuación aún mayor, podemos lograrlo utilizando redes con fracciones de llenado muy diferentes. Por ejemplo, utilizando la misma red hexagonal con $a_1 = 3.755 \text{ mm}$ y $R_1 = 0.88169 \text{ mm}$ ($f_1 = 0.25$) para el fondo, pero otra red más grande con $f_2 = 0.6$, obtenemos $\gamma_{sc} = 0.0058 \sqrt{\omega} \text{ m}^{-1}$. Esto representa una atenuación extraordinariamente más rápida de casi un 45 % en comparación con el fondo de metafluido. Es importante hacer hincapié que esta absorción extraordinaria se mantiene en el límite de bajas frecuencias muy debajo de la primera brecha prohibida en la estructura de bandas.

En la Figura 2, mostramos una comparación entre las simulaciones COMSOL, los cálculos analíticos y las medidas experimentales (símbolos). Las simulaciones COMSOL se realizaron utilizando la aproximación de Capa Límite Termoviscosa (BLI) [20] con solo pérdidas viscosas (línea punteada) y con pérdidas visco térmicas (línea a trazos).

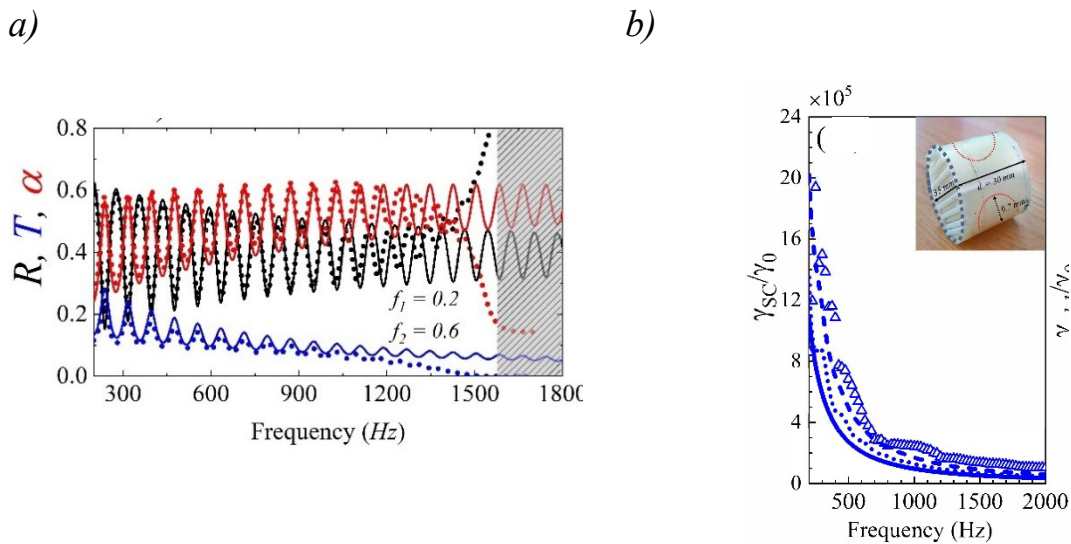


Figura 2 - a) Espectros de reflectancia, transmitancia y absorbancia para una barrera finita de SC con grosor $d = 1.56 \text{ m}$. El área sombreada marca la zona de zanja prohibida. b) Parte imaginaria del vector de onda (coeficiente de decaimiento) del SC normalizado a su valor en aire. La línea sólida muestra cálculos analíticos, las líneas punteadas y a trazos son simulaciones numéricas incluyendo pérdidas

viscosas y termo viscosas, respectivamente. Los símbolos representan las medidas obtenidas con la muestra vista en la foto insertada.

En la Figura 2-a), vemos una buena coincidencia entre el cálculo analítico y las simulaciones aproximadamente hasta 1200 Hz, lo cual es bastante más arriba de lo que nos dicta la condición de homogenización (900 Hz) [19]. Las oscilaciones observadas en los espectros también están en buen acuerdo y corresponden a las resonancias de Fabry-Perot de 79 Hz calculadas con la fórmula $c_{sc}/2d$. Otro resultado importante se muestra en la Figura 2-b), donde hemos extraído la parte imaginaria del vector de onda a partir de una barrera finita de SC simulada en COMSOL. Esto se hizo utilizando el método de la Ref. [21]. Los resultados obtenidos de la barrera finita de SC en COMSOL también concuerdan bien con el coeficiente de decaimiento analítico del SC infinito. Es importante también notar que el coeficiente de decaimiento es aproximadamente 5 órdenes de magnitud mayor que el decaimiento en el aire, lo cual es un resultado esperado en sistemas con fronteras fluido-sólido.

Para demostrar la aplicabilidad de la teoría, decidimos fabricar en una impresora 3D la misma muestra de cristal sónico de múltiple escala descrita en la Ref. [16]. Para hacer los dispersores utilizamos plástico ABS con una densidad de 1.05 g/cm^3 . El añadido en la Figura 2-b) es una foto de la muestra fabricada.

Los parámetros del SC son los siguientes: $a_1 = 2.5 \text{ mm}$, $a_2 = 33.7 \text{ mm}$, $R_1 = 1 \text{ mm}$ y $R_2 = 9.7 \text{ mm}$. El espesor de la barrera del SC fue de $d = 30 \text{ mm}$. Con este espesor, la barrera contiene 13 períodos a_1 . Sin embargo, solo es posible ajustar una capa de los cilindros grandes con este tamaño. Las mediciones se realizaron en un tubo de impedancia acústica (ACUPRO) con un transductor JBL 2426H. Utilizando el método de matriz de transferencia [22], obtuvimos $Z = \rho c$ y el número de onda complejo $k_{eff} = k + iy$ a partir de los datos experimentales. Con ambos parámetros, calculamos la velocidad compleja del sonido mediante la fórmula conocida $c_{complex} = \omega/k_{eff}$.

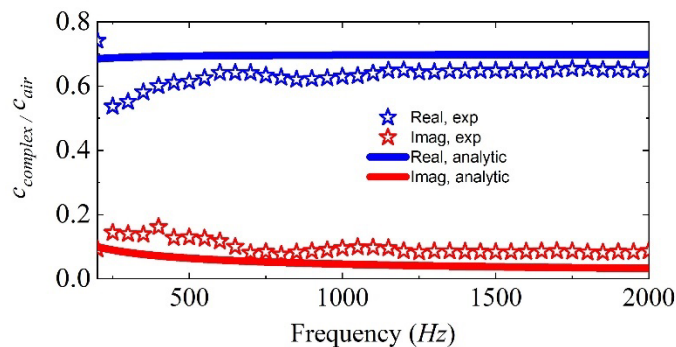


Figura 3 - Velocidad del sonido compleja normalizada en un SC con parámetros $a_1 = 2.5 \text{ mm}$, $a_2 = 33.7 \text{ mm}$, $R_1 = 1 \text{ mm}$ y $R_2 = 9.7 \text{ mm}$. Las líneas y símbolos corresponden a medidas experimentales en una barrera finita de SC, y la línea continua a cálculos analíticos en un SC infinito con los mismos parámetros geométricos de las redes de la muestra finita.

En la Figura 3 se muestra la velocidad del sonido compleja normalizada en un SC. Las líneas y símbolos corresponden a las mediciones de la muestra finita y la línea continua a los cálculos analíticos en un SC infinito. Podemos observar que, aunque en la muestra finita solo tenemos una capa de cilindros grandes, tanto la parte real como la imaginaria de la velocidad del sonido compleja están muy cerca del resultado predicho por nuestra teoría. Por otro lado, la parte real de la muestra finita tiende al valor exacto de la teoría para frecuencias más altas.

4 Conclusiones

Hemos presentado una teoría analítica para el cálculo del coeficiente de decaimiento viscoso en un supercristal acústico. Los resultados muestran cómo este tipo de sistemas múltiple escala pueden aumentar significativamente la absorción del sonido en comparación con un caso simple de cristal fónico con una sola red periódica. La teoría es válida para cualquier red de Bravais, cualquier geometría de dispersores, cualquier fracción de llenado y para todas las frecuencias por debajo de la primera zanja de frecuencias prohibida.

Todos los resultados analíticos concuerdan bien con las simulaciones de COMSOL y parcialmente con los experimentos.

Agradecimientos

M. Ibarias agradece a Jesús Arriaga por discusiones útiles durante la realización del trabajo.

Referências

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Fluid Mechanics. Oxford: Elsevier, 1984.
- [2] H. Ruiz, C.C. Claeys, E. Deckers, and W. Desmet, (2016). Numerical and experimental study of the effect of microslits on the normal absorption of structural metamaterials. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71:904–918.
- [3] Chong Rui Liu, Jiu Hui Wu, Zhengrui Yang, Fuyin Ma, (2020). Ultra-broadband acoustic absorption of a thin microperforated panel metamaterial with multi-order resonance. *Composite Structures*, 246:112366.
- [4] Miguel Molerón, Marc Serra-Garcia, and Chiara Daraio, (2016). Visco-thermal effects in acoustic metamaterials: from total transmission to total reflection and high absorption. *New Journal of Physics*, 18(3): 033003.
- [5] Xue Jiang, Yong Li, and Likun Zhang, (2017). Thermoviscous effects on sound transmission through a metasurface of hybrid resonances. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(4): EL363–EL368, 04.
- [6] Diana Maria Garza-Agudelo, Vicente Cutanda Henríquez, Cheol-Ho Jeong, Peter Risby Andersen, Martín Ibarias, José Sánchez-Dehesa, and Frieder Lucklum, (2024). Metasurfaces for sound absorption over a broad range of wave incidence angles. *Applied Acoustics*, 220:109965.
- [7] Xiuhai Zhang, Zhiguo Qu, and Hui Wang, (2020). Engineering acoustic metamaterials for sound absorption: From uniform to gradient structures. *iScience*, 23(5): 101110.
- [8] X.H. Zhang and Z.G. Qu, (2022). Viscous and thermal dissipation during the sound propagation in the continuously graded phononic crystals. *Applied Acoustics*, 189:108606.
- [9] Vicente Cutanda Henríquez and José Sánchez-Dehesa, (2021). Viscothermal effects in a two-dimensional acoustic black hole: A boundary element approach. *Phys. Rev. Appl.*, 15:064057.
- [10] M. Ibarias, J. Doporto, A. A. Krokhin, and J. Arriaga, (2022). Tuning the decay of sound in a viscous metamaterial. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 380(2237): 20220007.

- [11] Vicente Cutanda Henríquez, Victor M. García-Chocano, and José Sánchez-Dehesa, (2017). Viscothermal losses in double-negative acoustic metamaterials. *Phys. Rev. Appl.*, 8:014029.
- [12] M. Ibarias, Yu. Zubov, J. Arriaga, and A. A. Krokhin, (2020). Phononic crystal as a homogeneous viscous metamaterial. *Phys. Rev. Res.*, 2: 022053.
- [13] J.-P. Groby, A. Wirgin, L. De Ryck, W. Lauriks, R. P. Gilbert, and Y. S. Xu, (2019). Acoustic response of a rigid-frame porous medium plate with a periodic set of inclusions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126(2):685–693, 08.
- [14] J.-P. Groby, O. Dazel, A. Duclos, L. Boeckx, and L. Kelders, (2011). Enhancing the absorption coefficient of a backed rigid frame porous layer by embedding circular periodic inclusions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(6): 3771–3780, 12.
- [15] C. Lagarrigue, J. P. Groby, V. Tournat, O. Dazel, and O. Umnova, (2013). Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6): 4670–4680, 12.
- [16] Matthew D. Guild, Victor M. Garcia-Chocano, Weiwei Kan, and José Sánchez-Dehesa, (2014). Enhanced inertia from lossy effective fluids using multi-scale sonic crystals. *AIP Advances*, 4(12): 124302, 11.
- [17] Chang-Yong Lee, Michael J. Leamy, Jason H. Nadler, (2010). Frequency band structure and absorption predictions for multi-periodic acoustic composites. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10): 1809–1822.
- [18] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. N. Gumen, (2003). Speed of sound in periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 91: 264302.
- [19] Daniel Torrent, Andreas Håkansson, Francisco Cervera, and José Sánchez-Dehesa, (2006). Homogenization of two-dimensional clusters of rigid rods in air. *Phys. Rev. Lett.*, 96: 204302.
- [20] Mark J. Cops, J. Gregory McDaniel, Elizabeth A. Magliula, David J. Bamford, and Martin Berggren, (2020). Estimation of acoustic absorption in porous materials based on visco-thermal boundary layers modeled as boundary conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 148(3):1624–1635, 09.
- [21] Vladimir Fokin, Muralidhar Ambati, Cheng Sun, and Xiang Zhang, (2017). Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials. *Phys. Rev. B*, 76:144302.
- [22] Bryan H. Song and J. Stuart Bolton, (2000). A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3):1131–1152, 03.